Langages du premier ordre et sémantique

Antoine Cotton

IRMASG

2021

Acquis

- Description des $\mathcal{L}$-structures d'un langage $\mathcal{L}$ donné.
- Opérations permettant de construire des $\mathcal{L}$-structures : union de chaînes, produits réduits.
- Définition des plongements et sous-structures, permettant de comparer les $\mathcal{L}$-structures.

Perspectives

- Définir ce qu'est un $\mathcal{L}$-terme, une $\mathcal{L}$-formule, et détailler leur interprétation dans une $\mathcal{L}$-structure.
- Etablir ce qu'est une formule satisfaite dans une $\mathcal{L}$-structure.
- Enoncer le théorème de Łoś ainsi que ses conséquences.

Table des matières

Nouveaux symboles

- Deux parenthèses ().
- Un nombre dénombrable de variables : $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots,$ $n \in \mathbb{N}$.
- Les connecteurs : $\wedge$ (et), $\neg$ (non).
- Le quantificateur universel : $\forall$.
- Un symbole de relation binaire : $=$.

Table des matières

$\mathcal{L}$-terme

Définition

Les $\mathcal{L}$-**termes** regroupent plusieurs objets déjà étudiés :

- Une **constante** de $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{L}$-terme.
- Une **variable** est un $\mathcal{L}$-terme.
- Si F est une **fonction** de $\mathcal{L}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont n $\mathcal{L}$-termes, alors $F(t_1, \ldots, t_n)$ est un $\mathcal{L}$-terme.

Table des matières

Formule atomique

Définition

Une $\mathcal{L}$-**formule atomique** est une formule de la forme :

- $t_1 = t_2$ où t_1, t_2 sont deux $\mathcal{L}$-termes.
- $R(t_1, \dots, t_m)$ où R est une relation de $\mathcal{L}$ d'arité m et $t_1, \dots, t_m$ sont m $\mathcal{L}$-termes.

Formule

Définition

Une $\mathcal{L}$-**formule** est obtenue en appliquant un nombre fini de fois les opérations suivantes :

- Une $\mathcal{L}$-formule atomique est une $\mathcal{L}$-formule.
- Si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux $\mathcal{L}$-formules, $\phi_1 \wedge \phi_2$ est une $\mathcal{L}$-formule.
- Si ϕ est une $\mathcal{L}$-formule, alors $\neg\phi$ est une $\mathcal{L}$-formule.
- Si x est une variable et ϕ est une $\mathcal{L}$-formule, alors $\forall x\phi$ est une $\mathcal{L}$-formule.

Variables liées et libres

Définition

- Une variable x apparaissant dans une formule ϕ est dite **liée** si elle apparaît dans le quantificateur $\forall x$ ou si le quantificateur $\forall x$ porte sur elle dans la formule ϕ.
- Une variable x est **libre** dans ϕ si elle apparaît au moins une fois dans ϕ sans que le quantificateur $\forall x$ ne porte sur elle.

Définition

Un **énoncé** est une $\mathcal{L}$-formule dont toutes les variables sont liées.

Table des matières

$\mathcal{L}$-termes et $\mathcal{L}$-structures

On interprète les $\mathcal{L}$-termes dans une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$ de la façon suivante.

Soit $t(x_1, \dots, x_n)$ un $\mathcal{L}$-terme et soient $a_1, \dots, a_m \in A$, $m \geq n$. On définit $t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_m]$ par :

- Si $t(x_1, \dots, x_n) := x_i$, $1 \leq i \leq n$, alors $t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_m] = a_i$.
- Si $t(x_1, \dots, x_n) := c$, alors $t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_m] = c^{\mathcal{A}}$.
- Si $t(x_1, \dots, x_n) := F(t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_n(x_1, \dots, x_n))$, alors $t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_m] = F^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_m], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_m])$.

Satisfaction d'une formule dans une structure

Soit $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ une $\mathcal{L}$-formule et $a_1, \ldots, a_m \in A$, avec $m \geq n$. Pour faire court , une telle formule est **satisfaite** dans $\mathcal{A}$ si l'interprétation de cette formule dans $\mathcal{A}$ est satisfaite.

La satisfaction est établie récursivement, en suivant quatre règles.

Une règle de satisfaction

Règle

Si $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ est une **formule atomique** de la forme :

- $t_1(x_1, \ldots, x_n) = t_2(x_1, \ldots, x_n)$, où t_1 et t_2 sont deux $\mathcal{L}$-termes, $\mathcal{A} \models (t_1 = t_2)[a_1, \ldots, a_m]$ ssi $t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_m] = t_2^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_m]$.
- $R(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_n))$ où $t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_n)$ sont des $\mathcal{L}$-termes, $\mathcal{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)[a_1, \ldots, a_m]$ ssi $\mathcal{R}^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_m], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_m])$.

Définitions associées

Définitions

- $\mathcal{A}$ **satisfait** ϕ en $(a_1, \ldots, a_m)$ si $\mathcal{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_m]$.
- Une formule $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ est **satisfaisable** dans $\mathcal{A}$ s'il existe un uplet d'éléments $(a_1, \ldots, a_m)$ de A qui satisfait ϕ.
- On dira qu'une formule est **vraie** dans $\mathcal{A}$ si tout uplet d'éléments $(a_1, \ldots, a_m)$ de A satisfait $\mathcal{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_m]$.

Remarque

Pour un énoncé, être vrai ou satisfaisable est la même notion car toutes les variables libres sont quantifiées.

Classe axiomatisée

Définitions

- Une classe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{L}$-structures est **axiomatisée** par un ensemble d'énoncés $\mathcal{T}$ si $\mathcal{C}$ est exactement la classe des $\mathcal{L}$-structures qui satisfont $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{A} \models \mathcal{T}$, où $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{L}$-structure, on dit que $\mathcal{A}$ est un **modèle** de $\mathcal{T}$.
- La classe $\mathcal{C}$ des modèles de $\mathcal{T}$ est **finiment axiomatisée** s'il existe un nombre fini d'énoncés $\mathcal{T}_0$ tel que $\mathcal{C}$ est la classe des modèles de $\mathcal{T}_0$.

Table des matières

Structures élémentaires

Définitions

- Deux $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont **élémentairement équivalentes** si pour tout $\mathcal{L}$-énoncé σ, $\mathcal{A} \models \sigma$ ssi $\mathcal{B} \models \sigma$.
- Si $\mathcal{A}$ est une sous-structure de $\mathcal{B}$, on dira que $\mathcal{A}$ est une **sous-structure élémentaire** de $\mathcal{B}$ si pour toute $\mathcal{L}$-formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ et tout uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ d'éléments de A, $\mathcal{A} \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$ ssi $\mathcal{B} \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$.
- Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures. On dit que $\mathcal{A}$ se **plonge élémentairement** dans $\mathcal{B}$ s'il existe une sous-structure élémentaire de $\mathcal{B}$ qui est isomorphe à $\mathcal{A}$.

Théorème de Łoś

Théorème

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur I, soient $\mathcal{A}_i$ des $\mathcal{L}$-structures et $[a_{1i}], \ldots, [a_{ni}]$ n éléments de $\prod_{i \in I} A_i / U$. Soit $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ une $\mathcal{L}$-formule.

Alors $\prod_{i \in I} A_i / U \models \phi([a_{1i}]_U, \ldots, [a_{ni}]_U)$ ssi $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models \phi(a_{1i}, \ldots, a_{ni})\} \in U$.

Conséquences

Théorème

Soit $\mathcal{T}$ un ensemble de $\mathcal{L}$-énoncés. Alors $\mathcal{T}$ a un modèle ssi toute partie finie de $\mathcal{T}$ a un modèle.

Lemme

La classe des groupes abéliens sans torsion n'est pas finiment axiomatisable.